



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

Problema 1.

Demonstrați afirmațiile:

- Dacă $x \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$.
- Pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$, dacă $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{N}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ este irațional.
- Mulțimea $A = \{\sqrt{n+1} + \sqrt{16n+1} / n \in \mathbb{N}\}$ conține doar două numere raționale.

Problema 2.

- Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $1 + \log_x \frac{5-x}{10} = (2 \lg 2 - 1) \cdot \log_x 10$.
- Arătați că $x=3$ este singura soluție reală a ecuației $2^x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 7$.

Problema 3.

Considerând numărul complex $z = 1 - i\sqrt{3}$, se cere:

- Să se arate că $z^2 - 2z + 4 = 0$ și $z^3 + 8 = 0$.
- Să se demonstreze că numărul $t = (3z^2 - 4z + 4)(z^2 - 3z + 2)$ este real.
- Să se calculeze suma $S = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{16}z^5 - \frac{1}{32}z^6$.

Problema 4.

Fie mulțimea $M = \left\{ x(a;b) / x(a;b) = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}^*, a < b, (a;b) = 1 \right\}$, unde prin notația $(a;b) = 1$ înțelegem că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. La fiecare $x(a;b) \in M$, numim *strada* lui $x(a;b)$ intervalul $s[a;b]$, cu $s[a;b] = \left[\frac{4ab-1}{4b^2}; \frac{4ab+1}{4b^2} \right]$ iar numerele reale $x \in s[a;b]$ le numim *vecinii* lui $x(a;b)$.

- Arătați că orice $x \in (0;1)$ este *vecin* al lui $x(a;b)$, dacă și numai dacă $\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{4b^2}$.
- Demonstrați că $\frac{\sqrt{5}}{4}$ este *vecin* al lui $x(1;2)$ și $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nu este *vecin* al lui $x(1;2)$.
- Arătați că orice $x_0 \in M$ are o infinitate de *vecini* $x \in M$ dar și o infinitate de $x \in M$ care nu-i sunt *vecini*.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.